Université Paris-Diderot | Année 2013-2014
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II | L1 MASS-2

Feuille de TD 5 - Applications linéaires

Questions du cours.

(a) Donner la définition d'application linéaire entre deux espaces vectoriels.

(b) Donner la définition de noyau et image d'une application linéaire.

(c) Donner la définition de rang d'une application linéaire.

(d) Énoncer le théorème du rang.

(e) Définir la matrice associée à une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie.

(f) Soient E, F deux espaces linéaires avec $\dim E = n$ et $\dim F = m$, et A une matrice $m \times n$. Définir l'application linéaire $f : E \to F$ induite par A par rapport à deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F respectivement.

(g) Soient E un espace vectoriel de type fini, et F un espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille dans E, et $\{w_1, \ldots, w_p\}$ une famille dans F. Sous quelles conditions une application linéaire $f : E \to F$ est uniquement déterminée en imposant $f(v_j) = w_j$, pour $j = 1, \ldots, p$? Justifier soigneusement.

Exercice 1. Parmi les applications suivantes $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels, déterminer les applications linéaires. Le cas échéant, fixer des bases de E et F, et déterminer la matrice associée par rapport aux bases choisies.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (2x + y, 2y)$,

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2x, 1 + y)$,

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (y, x)$,

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$,

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (\cos x, \sin x)$,

(f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 2x + 3y, 0)$,

(g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 5z, 0)$

(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x - 3y, x + y, z + 2)$

Exercice 2. Décrire toutes les applications linéaires $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telles que $f(1, 0, 0) = (1, 0)$ et $f(0, 1, 0) = (0, 1)$.

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $(x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x + 3y)$, et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, 2y + z)$.

(a) Montrer que f, g, $g \circ f$, $f \circ g$ sont des applications linéaires.

(b) Écrire les matrices associées à $f, g, g \circ f, f \circ g$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Quel rapport y a-t-il entre ces matrices ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z + 3t,\ -x + 3y + z - 3t,\ x - y + 2z + 4t,\ 2x + y - 3z - t)$$

f est-elle bijective ? Si oui, expliciter f^{-1} et en donner la matrice associée.

Exercice 5. On considère un espace vectoriel réel E de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'application linéaire dont la matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le noyau et l'image de f. Calculer le rang de f.

(b) Calculer la matrice de f^2 et montrer que $f^2 - 3f = 0$.

Exercice 6. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme déterminé par

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 \quad ; \quad f(e_2) = 2e_1 - e_2 - e_3 \quad ; \quad f(e_3) = -e_1 + e_2 + 3e_3$$

(a) Donner la matrice associée à f.

(b) Déterminer l'image du vecteur $u = (x, y, z)$. En déduire celle de $(-1, 2, -3)$.

(c) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et en donner une base. En déduire la dimension de $\operatorname{Im} f$.

(d) Déterminer $f^{-1}(3, -1, 1)$ et $f^{-1}(1, 0, 1)$.

(e) Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

(f) Donner un système d'équations caractérisant $\operatorname{Im} f$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (-12x - 15y - 3z,\ 8x + 10y + 2z,\ 8x + 10y + 2z).$$

(a) Donner la matrice de f.

(b) Donner un système d'équations caractérisants une base pour chacun des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

(c) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$. Y a-t-il égalité ?

(d) Montrer que $f \circ f = 0$.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}^5$ et $F = \mathbb{R}^4$. On considère l'application linéaire f de E dans F donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau et l'image de f. On en donnera une base et un système d'équations.

Exercice 9. On considère $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (-2x + 3y + z,\ -2x + y - z,\ 3x - 2y + z)$$

Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(10, 1, 2, 0) = 1, \quad f(1, 2, 1, 0) = 2, \quad f(2, 0, 1, 1) = 3, \quad f(0, 0, 0, 2) = 4.$$

Calculer $f(1, 1, 1, 1)$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $f(x, y, z)$. En déduire $f(1, 2, -1)$.

(b) Trouver des bases et des équations caractérisant $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im}(f)$.

(c) Pour quels vecteurs $w \in \mathbb{R}^3$ peut-on écrire $f^{-1}(w) = \{u + v \mid u \in \operatorname{Ker} f\}$? Trouver un tel v quand $w = (1, -3, 0)$.

Exercice 12. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y, z) = (6x - 2y + 2z, 10x - 3y + 4z, -2x + y).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(a) Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
(b) Donner la dimension et une base de $\operatorname{Ker} f$. Donner la dimension et une base de $\operatorname{Im} f$.
(c) Déterminer l'ensemble des vecteurs u tels que $f(u) = u$.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 0, -3)$, $v_3 = (0, 2, 5)$.
(a) Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, telle que $f(v_j) = e_j$ (où $j = 1, 2, 3$ et les vecteurs e_j sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$).
(b) Montrer qu'il existe une infinité d'applications linéaires f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, telles que

$$f(v_1) = e_1, \quad f(v_2) = e_2, \quad f(v_3) = 2e_1 - e_2.$$

Suggestion : on observera qu'il y a une infinité de manières de compléter (v_1, v_2) de façon a obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = e_1 + 6e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 - e_3 \end{cases}$$

Déterminer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 15. Soient E, F deux espaces vectoriels de la même dimension finie n. Montrer que pour tout isomorphisme $f : E \to F$ il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que la matrice associée à f par rapport à ces bases est l'identité.

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.
(a) Montrer l'équivalence suivante :

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \quad \text{si et seulement si} \quad f \circ f = 0.$$

(b) En déduire que, si $f \circ f = 0$, alors l'endomorphisme $I_E + f$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire telle que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$.
(a) Montrer que $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f = 2$.
(b) Montrer que pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^4$ nous avons $(f \circ f)(v) = 0$.
(c) Soit (u_1, u_2) une base de $\operatorname{Ker} f$. Soit $u_3 \in \mathbb{R}^4$ un vecteur tel que $f(u_3) = u_1$ et soit $u_4 \in \mathbb{R}^4$ un vecteur tel que $f(u_4) = u_2$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(d) Donner la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
(e) L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + 4z, x + y + 3z + t, 3x + 2y + 7z + t, x - y - z - 3t).$$

(a) Trouver une base du sous-espace $\operatorname{Ker} f$; quelle est sa dimension ?
(b) Trouver une base et des équations du sous-espace $\operatorname{Im} f$; quelle est sa dimension ?
(c) Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$. Montrer que l'on a $E \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^4$.
(d) Soit $g : E \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Montrer que g est injective et que l'on a $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$.

Exercice 19. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit f un endomorphisme non nul de E. On suppose que $f^2 = f \circ f = 0$.
(a) Le noyau de f peut-il être réduit à $\{0\}$? Quelle peut-être la dimension de l'image de f ?

(b) Trouver un exemple d'une telle application linéaire.

(c) Construire toutes les applications f non nulles vérifiant $f^2 = 0$.

Exercice 20. On considère l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ représenté, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(a) Discuter selon le paramètre a, le rang de f_a.

(b) Déterminer le noyau et l'image de f_a.

Exercice 21. Pour chaque réel t on considère l'application linéaire $f_t : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & t \\ t-1 & t-2 & 1-t \end{pmatrix}$$

(a) Pour quelle valeurs du paramètre réel t l'application f_t est-elle inversible ?

(b) Lorsque f_t est inversible, donner la matrice de f_t^{-1} par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Le vecteur $(1, -2, 0)$ appartient-il à $\operatorname{Im} f_2$?

(d) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2z = -2 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 22. Pour chaque réel a on considère $f_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f_a(x, y, z) = (x - y - 2z,\ -x + ay + z,\ 2x + y - 3z)$$

(a) Donner la matrice M_a de l'application linéaire f_a

(b) Pour quelle valeurs du paramètre réel a l'application f_a est-elle bijective ?

(c) Lorsque f_a est inversible, donner la matrice de f_a^{-1} .

Exercice 23. Pour tout paramètre $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f_a(x, y, z, t) = \big(x + y, (2-a)x + (2+a)y + (a-1)t, a^2(-2x + 2y + z) - az\big).$$

(a) Écrire la matrice M_a associée à f_a par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer le rang de f_a.

(c) Pour quelles valeurs de a a-t-on f_a injective ? surjective ? bijective ?

(d) Donner une base de $\operatorname{Ker} f_a$.

(e) Donner une base de $\operatorname{Im} f_a$.

(f) Trouver des systèmes d'équations caracterisants $\operatorname{Ker} f_a$ et $\operatorname{Im} f_a$.

Exercice 24. Pour tous paramètres $a, b \in \mathbb{R}$, soit $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & b \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le rang de $f_{a,b}$.

(b) Pour quelles valeurs de a, b a-t-on $f_{a,b}$ injective ? surjective ? bijective ?

(c) Calculer $f_{2,3}^{-1}(2, 3, 3)$, $f_{a,0}^{-1}(0, -2, a)$, $f_{0,0}^{-1}(1, 0, 0)$.

(d) Donner une base de $\operatorname{Ker} f_{a,b}$.

(e) Donner une base de $\operatorname{Im} f_{a,b}$.

(f) Trouver des systèmes d'équations caracterisants $\operatorname{Ker} f_{a,b}$ et $\operatorname{Im} f_{a,b}$.